**Tecnicatura Superior en Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial**

**Funciones:**

1) Definir dominio, rango y regla, a que hacen referencia. Aplique la misma en simbología matemática.

La relación f: A~B/y=f(x) es una función si y solo si verifica las siguientes condiciones de existencia y unicidad.

A) Todo elemento del conjunto de partida A tiene imagen en el conjunto de llegada B. Dom f = A.

B) Esa imagen es única

Una función es una **regla** de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto. Al primer conjunto (el conjunto D) se le da el nombre de dominio.

**Funciones escalares o reales de variable real:**

Se denomina así a las funciones cuyo dominio son los números reales o un subconjunto de ellos y cuyo conjunto de llegada también son números reales. En general se expresan como:

F: ACR -> R/y=f(x)

La representación grafica de una función escalar de una variable real es una curva en el plano donde se considera un sistema de coordenadas ortogonales y se toma el dominio sobre el eje de abscisas y la imagen sobre el eje de las ordenadas.

**Dominio de una función:**

El dominio está formado por todos los números reales para los cuales existe imagen real. Dom f=A= {xeR/∃yeR ∧ y=f(x)}

Hay que tener en cuenta tres tipos de restricciones:

1) Denominadores **≠** 0

2) Argumentos de logaritmos > 0

3) Radicando de raíces de índice par >= 0

**Conjunto imagen:**

Se denomina así al conjunto de valores que toman las imágenes (es decir y). Im f= {yeR/∃xeR ∧ y= f(x)}

Si f: ACR->R/y=f(x), Im f CR

Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado f(x) de un conjunto E.

**2) Evalué el dominio. Expresar en notación simbólica**

A) f(x)= 1/x-10 es x >10 o x <10 es decir (- ∞,10 ) U (10,+ ∞ )

B) f(t)= √ 16-t2 es –4<=t<=4 es decir que t esta en el intervalo [-4,4]

C) f(x)= x-3/2 g(x)= √x

Evalué (f+g)(x): x>=0 es decir [0, ∞]

3.- Dado el conjunto A y B, indique cuales corresponden a una función y cuales no: a) A : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} − B : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} b) A : {1, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6} − B : {1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 6} 2 c) A : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} − B : {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1} d) A : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} − B : {0, 1, 4, 9, 16, 25, 32, 49, 64, 81} e) A : {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1} − B : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

3)- a)- Es función b)- No es función c)- Es función d)- Es función e)- No es función

4) Dadas las siguientes expresiones matemáticas, indique cuales corresponden a funciones y cuales no:

a)- Es función b)- No es función c)- Es función d)- Es función

5)- Un depósito abierto (sin tapa) de latón con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación (en latón) sea lo más económica posible?

Llamamos x al lado de la base e y a la altura del depósito. Así, el volumen es:

V = = 4000 litros= 4000 dm3

Así *y*=

La superficie total del depósito (recordemos que está abierto) será:

A=4*xy*+=4*x* += + con > 0

Buscamos *x* para que A sea mínima, debemos buscar el valor mínimo deduciendo ese valor de la derivada de A igualada a cero.

A´= +2=

A´= 0 despejando queda = 8000 es decir = 20 dm3

Para verificar que es un mínimo se realiza la derivada segunda y si su valor es mayor que cero el valor encontrado es un mínimo.

A´´= +2 luego para A´´ (20) > 0 entonces en x=20 es un mínimo

Así, el lado de la base debe medir x=20 dm y la altura y= 10 dm.

**Límites**

1)- Sea un número positivo cualquiera. Debemos producir un δ>0 tal que se cumpla esta condición

**0<|x-c|< δ => |f(x)-L|<**

Para ello

Partimos de c=1, f(x)= y L=- , es decir

0<|x-1|< δ => |+|<

Ahora hay que encontrar numéricamente un nexo entre δ y . La estrategia está en la expresión |f(x)-L|< . Hay que ver cómo se comporta dicha expresión cuando se la reduce a |x-1| en función de encontrar una proporcionalidad con .

|+|<

||<

||<

||<

||<

||>

||>

Se sigue operando hasta que finalmente se obtiene:

||< = δ

Esto indica que el límite, con x->1 para la función, probado desde δ (), debe funcionar para

= δ ()

2)- Defina continuidad de una función. Exprese en símbolos limx→4 (3x − 7) es 5

Las condiciones que debe cumplir una función para ser continua en un punto x=a de acumulación de su dominio son:

1. Que exista f(a) (a e Dom f)
2. Que exista l y sea finito en el punto
3. f(a) = l

=

3)- Por otro lado, para calcular el límite de *f(x)* debemos sustituir *x* por 4 según la definición.

*límx→*4 (3x − 7) = 3.4 – 7= 12 – 7= 5

4)- *límx→*-2 es 10

Se simplifica la ecuación y luego se sustituye *x* por -2

*límx→*-2 = *límx→*-2 (x+5)= ((-2)+5)= 3

El límite de la función no da como resultado 10 sino 3.

5 – De dos ejemplos de discontinuidad

F:R-{1} -> R/f(x)=x2-1/x-1 en x=1

Vemos que no existe f(1)

Calculamos el límite Lim (x-1)(x+1)/x-1 Lim(x+1)=2

La función no esta definida en x=1 , pero si tiene limite finito . Es una función discontinua evitable

F:R-{0} ->R/f(x)=sg x =|x|/x en el origen. No existe f(0).

Calculamos Lim|x|/x=1 Lim |x|/x=-1

L+ es distinto de l-, por lo tanto no existe el limite

F es discontinua.

# Derivadas

1.- Indicar si c/u de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar toda respuesta, si es V demostrarla y si es Falsa dar un contraejemplo adecuado.

1. Toda función continua en un punto es derivable en ese punto.

b) Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.

1- a)-Toda función continua en un punto es derivable en ese punto es una afirmación verdadera. De hecho, hay un teorema muy importante en el cálculo que demuestra exactamente eso.

\*Teorema:

Si existe *f´(c)*, entonces *f* es continua en *c*.

Demostración: Se necesita demostrar que el límite de = Para ello se parte de la siguiente fórmula

= donde *x c*

=

=

= .0

=

Es decir = con lo cual queda demostrado el teorema

b)- El reciproco del anterior teorema no es verdadero. Toda función derivable en un punto es continua en ese punto es una afirmación falsa. Existen innumerables ejemplos de ello. De todos modos, el matemático Weierstrass construyo con la ayuda de la lógica y su imaginación un fascinante contraejemplo conocido como la función de Weierstrass que despejo cualquier duda de la existencia de funciones derivables pero discontinuas en cualquier punto.

2.- Expresar el concepto de derivada de una función. Escribir la definición simbólicamente

Sea f una función definida en un intervalo abierto J y x0 e J. Se denomina derivada de la función f en x0 lo que denotamos por f´(x0), al límite, cuando existe, del cociente

Esto es:

En este caso, se dice que la función f es derivable (o diferenciable), en x0.

Vemos así, que, desde cierto punto de vista, puede interpretarse la derivada de una función en un punto, como la pendiente de la gráfica correspondiente en dicho punto, mientras que, desde otro punto de vista nos da la rapidez instantánea con que varía la función en el punto considerado.

3.- Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 pesos la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada peso que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 pesos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cuál será ese beneficio? Resolver y dejar las fórmulas utilizadas.

Se denominará x al número de pesos de aumento de precio. Así, cada helado costará

50 + x pesos vendiendo 200 - 2x helados/día.

Se obtendrá unos ingresos I (x) por la venta de los helados:

I (x) = (50 + x) (200 - 2x)

Mientras que el gasto es:

G (x) = (200 - 2x) · 40

Ahora se puede calcular el beneficio B (x):

B (x) = I (x) - G (x) = (50 + x) (200 - 2x) - (200 - 2x) · 40 = (200 - 2x) (50 + x - 40) =

= (200 - 2x) (x + 10) = -2x2 + 180x + 2000

Y así se halla x, mediante la derivada primera igualada a cero, para el máximo beneficio:

B'(x) = -4x + 180

B'(x) = 0 es decir -4x + 180 = 0 obteniendo x = 45

Para verificar que es un máximo se realiza la derivada segunda y si su valor es menor que cero el valor encontrado es un máximo.

B''(x) = -4; B''(45) < 0 lo que implica que en x = 45 hay un máximo

Finalmente se obtendrá un beneficio máximo vendiendo cada helado a 50 + 45 pesos. En este caso, el beneficio sería de B (45) = 6050 pesos.

4)Hay dos tangentes a la curva, y=4x-x2, que pasan por el punto (2,5). Encuentre las ecuaciones de ambas. Sugerencia (Sea x0, y0), el punto de tangencia, encuentre las dos condiciones que debe satisfacer dicho punto.

Para calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la función que pasan por (2,5) se debe partir del ángulo de la rectángulo de la figura cuyo cateto opuesto *Co=la* y el cateto adyacente CA=xi-x y la tangente de su ángulo es el cociente de los dos anteriores, es decir

*Co tg(α)= = mientras que hi=li+yi*

α

*CA*

Si la función de la curva es *4x+x2 ,* entonces la tangente de cada punto de la misma es

*tg(α)=f´(x) = 4-2x donde 4-2x es su derivada*

Como *CA=xi-x y xi=2,* luego *CA= 2 - x .* Ahora pasamos a la siguiente igualdad

*4-2x = 🡪 (4-2x)(2-x)=li*

Pero como *li= hi-yi donde hi=5 e yi=y= 4x-x2, luego li= 5 - y = 5 – (4x-x2) = 5 – 4x - x2 .* Reemplazando en la anterior expresión y operando

*(4-2x)(2-x)= 5 – 4x - x2*

Operando algebraicamente se obtiene la siguiente ecuación y de su resolución se obtienen sus respectivas raíces

*x2 - 4x+3= 0 donde x1= 1 y x2=3*

Luego para obtener las ecuaciones de las rectas de la tangentes de x1= 1 y x2=3

*tg(α en x1)= 4-2(1)= 2*

*tg(α en x2)= 4-2(3)= -2*

La fórmula general para obtener las ecuaciones de las rectas es *y= tg(α). x+bi*, donde b es la intersección de la tangente y el eje de las y

*b1  = y - tg(α en x1).(x)= 5 - tg(α en x1).(2)= 5-2(2)=1*

* *y= 2(x)+ 1*

*b2  = y - tg(α en x2).(x)= 5 - tg(α en x2).(-2)= 5-2(-2)=9*

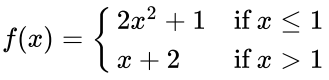
* *y= -2(x)+ 9*

5)- Calcular las derivadas de las siguientes funciones

a)- y = - 🡪 y´= + =

b)- y = ()(-3x+1) 🡪 y´= 2(-3x+1)+())= (-42+2x-51)

c)-



Como es función por trozos, para calcular su derivada debemos deducir si la función es derivable en x=1. Para ello se debe deducir si dicha función es continua o discontinua y para ello se deben calcular los límites por izquierda y por derecha en ese punto.

Límite por izquierda:

= x+ 2= (1)+ 2= 3

Mientras que el límite por derecha es

= 2x2 + 1= 2(1)2 + 1= 3

Por lo tanto el límite de f(x) existe y es 3 tanto por izquierda como por derecha, por lo cual la función es continua. Sin embargo, el hecho de ser continua no significa que la función sea derivable. Entonces se debe calcular la derivada en 1 por izquierda y por derecha

= 1 por izquierda

= 4.1 = 4 por derecha 🡪 se sigue que

Entonces existiría un salto en la función y por lo tanto la misma no es derivable en 1. Se concluye que la derivada es

d)- y= 🡪 y´= *2x* +

Bibliografía:

* Dr. Salvador Gigena, Dr. Daniel Azpilicueta (2005). Análisis Matemático 1(2da Edición). Editorial Universitos-Serie Ingeniería
* Venturini, Alejandro, Scardigli, Monica. (2019). Análisis Matemático 1 para estudiantes de Ingeniería (10ma Edición). Ediciones Cooperativas. Colección el número de oro.
* Google Académico (2020) Stewart, Precálculo, Calculo de una variable